BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

УДК 51793

О ТРЕХКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Э.Б.СУЛТАНОВА
Бакинский Государственный Университет
elnare-sultanova@mail.ru

В работе получены условия о трехкратной полноте системы собственных и присоединенных векторов для некоторого класса операторных пучков, в главной части которых содержится нормальный оператор. Полученные условия выражены в терминах операторов операторных пучков.

Ключевые слова: *Гильбертово пространство, резольвента, операторный пучок*

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = E - \lambda^3 C^3 + \sum_{j=0}^{2} \lambda^j B_j C^j \quad , \tag{1}$$

где λ спектральный параметр, $B_j (j = \overline{0,2})$ и C ограниченные операторы в H.

Определение 1. Если при некотором $\lambda \in$ Ă операторный пучок $L(\lambda)$ обратим в H, то λ называется регулярной точкой $L(\lambda)$, а $L^{-1}(\lambda)$ - резольвента пучка $L(\lambda)$.

Если при некотором $\lambda_0 \in$ Ă уравнение $L(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет решение $\varphi_0 \neq 0$, то λ_0 называется собственным значением пучка $L(\lambda)$, а φ_0 соответствующим собственным вектором пучка (1). Если векторы $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{m_0}$ удовлетворяет уравнениям

$$\sum \frac{L^{(m)}(\lambda_0)}{m!} \varphi_{s-m} = 0, \quad s = 0,1,...,m_0 \ ,$$

то эти векторы называются собственными и присоединенными векторами пучка $L(\lambda)$, отвечающие λ_0.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{m_0}\}$ цепочка собственных и присоединенных векторов, отвечающих λ_0. В пространстве H^3 образуем систему $\{\tilde{\varphi}_p\}_{j=0}^{2}$, где $\varphi_q^0 = \varphi_q (q = 0,...,m_0)$ и $\varphi_q^{(j)} = \frac{dj}{dt^j} e^{\lambda_0 t} (\varphi_q^{(0)} + \varphi_{q-1}^{(0)}) \frac{t}{1!} + ... + \frac{t^q}{q!} \varphi_q^{(0)}) \,|_{t=0}$ $(j = 0,1,2;\ q = 1,...,m_0)$. Если система $\{\tilde{\varphi}_q\} \subset H^3$, построенная для всех собственных значений и собственных и присоединенных векторов полна в H^3, то будем говорить, что система собственных и присоединенных векторов трехкратно полна в H.

В данной статье мы находим достаточные условия на коэффициенты пучка $L(\lambda)$ обеспечивающие трехкратную полноту систем собственных и присоединенных векторов в H .Отметим, что при C – полный самосопряженный оператор, а B_j -вполне непрерывные операторы. Эта задача впервые исследована М.В.Келдышем [1]. Далее, когда C – некоторый нормальный оператор, спектр которого содержится на некоторых лучах, а B_j вполне непрерывные операторы в [2], а в работах [3-6] получены оценки резольвенты для некоторых классов операторных пучков третьего порядка, когда A самосопряженный положительный оператор.

Пусть выполняются следующие условия

1) C –полный нормальный вполне непрерывный оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon,\ \ 0 \le \varepsilon < \pi/6 \right\}$$

2) Операторы $B_j\,((j = 0,1,2))$ ограничены в H.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) и 2). Если имеет место неравенство

$$\beta(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2} \beta_j(\varepsilon) \|B_j\| < 1, \qquad (2)$$

где

$$\beta_0(\varepsilon) = \frac{1}{\cos 3\varepsilon}, \quad \beta_1(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}} (1 - \sin 3\varepsilon)^{-1/2}.$$

Тогда на лучах $\Gamma_k = \left\{\lambda \ \middle|\ \lambda = re^{i(\pi/2 + k\pi/3)}, r > 0\right\}$ $(k = \overline{0,s})$ существует резольвента $L^{-1}(\lambda)$ и на этих лучах имеет место оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \le const.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = re^{i(\pi/2 + k\pi/3)}, k = \overline{0,5}$. Тогда очевидно, что на лучах Γ_k операторный пучок

$$L_0(\lambda) = E - \lambda^3 C^3 = (E - \omega_1 \lambda C)(E - \omega_2 \lambda C)(E - \omega_3 \lambda C) \qquad (3)$$

обратим, где $\omega_1 = 1, \omega_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Напишем пучок $L(\lambda)$ в виде

$$L(\lambda) = L_0(\lambda) + L_1(\lambda) \quad , \qquad (4)$$

где $L_0(\lambda)$ определена из (3), а $L_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{2} \lambda^j B_j C^j$.

Тогда из неравенства (4) при $\lambda \in \Gamma_k$ получаем

$$L(\lambda) = L_0(\lambda) + L_1(\lambda) = (E + L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda)) L_0(\lambda). \qquad (5)$$

Теперь оценим норму оператора $L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in \Gamma_k$. При $\lambda \in \Gamma_k \left(\lambda = re^{i(\pi/2 + k\pi/3)}, r > 0 \right)$ имеем

$$\left\| L_q(\lambda) L_0^{-1}(\lambda) \right\| = \left\| \sum_{j-0}^{r} \lambda^j B_j C^j L_0^{-1}(\lambda) \right\| \le \sum_{j=0}^{r} \left\| B_j \right\| \left\| \lambda^j C^j \left(\lambda^3 C^3 - E \right)^{-1} \right\|. \qquad (6)$$

С другой стороны $\left\| \lambda^j C^j \left(\lambda^3 C^3 - E \right)^{-1} \right\| = \left\| r^j C^j (r^3 e^{3i(\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3})} - E)^{-1} \right\|$.

Если $\{e_n\}$ ортонормальная система собственных и присоединенных векторов оператора С отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$. $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$, $|\varphi_n| < \varepsilon$, то

$$\left\| r^j C^j \left(r^3 e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + k\right)} C^3 - E \right)^{-1} \right\| = \left\| r^j C^j \left(ir^3 C^3 + E \right)^{-1} \right\| = \sup_n r^j |\lambda_n| \left| (ir^3 |\lambda_n|^3 e^{3i\varphi_n} + 1)^{-1} \right| =$$

$$= \sup_n \left| r^j |\lambda_n| ir^3 |\lambda_n|^3 (\cos 3\varphi_n + i \sin 3\varphi_n) + 1)^{-1} \right| =$$

$$= \sup_n \left| r^j \right| \left| \lambda_n \right|^j \left(\left((1 - r^3 |\lambda_n|^3 \sin 3\varphi_n \right)^2 + r^3 |\lambda_n|^3 \cos 3\varphi_n)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_n \left| r^j \right| \left| \lambda_n \right|^j \left(1 + r^6 |\lambda_n|^6 - 2r^3 |\lambda_n|^3 \sin 3\varphi_n \right)^{-1/2} \le \sup_n \left| r^j \right| \left| \lambda_n \right|^j \left(1 + r^6 |\lambda_n|^6 - 2r^3 |\lambda_n|^3 \sin 3\varepsilon \right)^{-1/2} \le$$

$$\le \sup_{\tau \ge 0} \tau^j \left(1 + \tau^6 - 2\tau^3 \sin 3\varepsilon \right)^{-1/2} = \sup_{\tau \ge 0} \left(\frac{\tau^{2j}}{1 + \tau^6 - 2\tau^3 \sin 3\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

При $j = 0$ имеем

$$\left\| \left(r^3 C^3 - E \right)^{-1} \right\| \le \sup_{\tau \ge 0} \left(\frac{\tau^{2j}}{1 + \tau^6 - 2\tau^3 \sin 3\varepsilon} \right)^{1/2} = \frac{1}{\cos 3\varepsilon}.$$

При $j=1$ имеем

$$\left\| rC\left(\lambda^3C^3-E\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^6-2\tau^3\sin 3\varepsilon}\right)^{1/2} \le \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^6}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{1-\left(2\tau^3\sin 3\varepsilon\right)\left(1+\tau^6\right)^{-1}}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^6}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{1-\sin 3\varepsilon}\right)^{1/2} = \frac{1}{\left(1-\sin 3\varepsilon\right)^{1/2}}\cdot\frac{2^{1/3}}{3^{1/2}}.$$

При $j=2$ имеем

$$\left\| r^2C^2\left(\lambda^3C^3-E\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau^4}{1+\tau^6-2\tau^3\sin 3\varepsilon}\right)^{1/2} \le \sup_{\tau\ge 0}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^6}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{1-2\tau^3\sin 3\varepsilon\cdot\left(1+\tau^6\right)^{-1}}\right) \le$$

$$\le \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}}\cdot\left(\frac{1}{\left(1-\sin 3\varepsilon\right)}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, при $\lambda\in\Gamma_k$ имеет место оценки: $\left\| L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \beta(\varepsilon)$

и

$$\left\| L^{-1}(\lambda)\right\| = \left\| L_0^{-1}(\lambda)\right\| \left\| (E+L^{-1}(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)\right\|^{-1} \le \frac{1}{1-\beta(\varepsilon)}\left\| L_0^{-1}(\lambda)\right\| \le const\,.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем теорему о дискретности спектра пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда операторный пучок $L(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Кроме того, если $C\in\sigma_p$, то резольвенты $L^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ.

Доказательство. Напишем $L(\lambda)$ в виде

$$L(\lambda) = E-\lambda^3C^3+\sum_{j=0}^{r}\lambda^jB_jC^j+B_0 = \left(E+B_0\right)+\sum_{j=0}^{r}\lambda^jB_jC^j$$

Так как по условию теоремы $\left\| B_0\right\| < \cos 3\varepsilon < 1$, то $E+B_0$ обратим в H. Поэтому

$$L(\lambda) = \left(E+\sum_{j=0}^{r}\lambda^jB_jC^j(E+B_0)^{-1}-\lambda^3C^3\left(E+B_0\right)^{-1}\right)(E+B_0)\,.$$

Тогда

$$L(\lambda) = (E+Q(\lambda))(E+B_0)\,,$$

где

$$Q(\lambda)=\sum_{j=1}^{r}\lambda^j B_j C^j\left(E+B_0\right)^{-1}-\lambda^3 C^3(E+B_0)^{-1}\ .$$

Очевидно, что из вполне непрерывности С следует, что $Q(\lambda)$ есть вполне непрерывный оператор при каждом $\lambda\in$ Ă. Тогда учитывая, что $L(0)=E$ из леммы Келдыша [1] следует, что $E+Q(\lambda)$ обратим везде кроме не более счетных точек из комплексной плоскости. Эти точки являются собственными значениями ($E+Q(\lambda)$) с конечной кратностью с единственной предельной точкой в бесконечности.

Так как $L^{-1}(\lambda)=(E+B_0)^{-1}(E+Q(\lambda))^{-1}$, то это свойство относится и к пучку $L(\lambda)$.

С другой стороны, если $C\in\sigma_p, 0<p<\infty$, то $C^2\in\sigma_{p/2}, C^3\in\sigma_{p/3}$, поэтому

$$\lambda B_1 C\ (E+B_0)^{-1}\in\sigma_p,\lambda^2 B_2 C^2(E+B_0)^{-1}\in\sigma_{p/2},\lambda^3 B_3 C^3(E+B_0)^{-1}\in\sigma_{p/3}\ .$$

Тогда из леммы Келдыша [1] следует, что $E-Q(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ. Тогда учитывая, что

$L^{-1}(\lambda)=(E+B_0)^{-1}(E-Q(\lambda))^{-1}$ завершаем доказательство теоремы.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 1 и $C\in\sigma_p, 0<p\le 3$. Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ трехкратно полна в H.

Доказательство. Допустим противное. Если это не так, то из работы [1] следует, что существует векторы $f_0, f_1, f_2\in H$ такие, что $\|f_0\|+\|f_1\|+\|f_2\|\ne 0$, $\left(L^*(\bar{\lambda})\right)^{-1}\left(f_0+\lambda f+\lambda^2 f_1\right)$- целая вектор функция.

Тогда из условия $C\in\sigma_p, 0<p\le 3$ следует, что вектор функция $R(\lambda)=(L^*(\lambda))^{-1}(f_0+\lambda f_1+\lambda^2 f_2)$ на лучах Γ_k $(k=\overline{0,s})$ растет не быстрее чем $|\lambda|^2$. Так как на лучах Γ_k $(k=\overline{0,s})$ резольвента $L^{-1}(\lambda)$ ограничен, и на этих лучах $\|R(\lambda)\|\le const|\lambda|^2$. Поскольку $R(\lambda)$ целая функция порядка p, то принимая во внимание теорему Фрагмена-Линделефа получаем, что

$$R(\lambda)=g_0+\lambda g_1+\lambda^2 g_2),\ g_i\in H,\ i=\overline{0,2}.$$

Тогда

$$f_0+\lambda f_1+\lambda^2 f_2=L^*(\lambda)(g_0+\lambda g_1+\lambda^2 g_2).$$

Сравнивая коэффициенты при λ^{55} получаем, что $C^3 g_2 = 0$, т.е. $g_2 = 0$. Далее из равенства $f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 = L^*(\lambda)(g_0 + \lambda g_1)$ следует, что $C^{*3} g_1 = 0$, т.е. $g_1 = 0$. Аналогично, получаем, что $g_0 = 0$. Таким образом, $R(\lambda) \equiv 0$. Отсюда следует, что $f_0 = f_1 = f_2 = 0$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие. Пусть С самосопряженный полный вполне непрерывный оператор, выполняются условия теоремы 3 и

$$\alpha(0) = \sum_{j=0}^{r} \|\beta_j\| B_j < 1,$$

где $\beta_1 = 1, \beta_1 = \beta_2 = \dfrac{2^{1/3}}{2^{1/2}}$. Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $L\ (\lambda)$ трехкратно полна в H.

Используя теорему 3 и технику оценки резольвенты из (1) аналогично доказывается:

Теорема 4. Пусть выполняется условие теоремы 3 и операторы T_j-вполне непрерывны в H $\left(j = \overline{0,r}\right)$.

Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка

$$L(\lambda) = E - \lambda^3 C^3 + \sum_{j=0}^{r} \lambda^j (B_j + T_j) C^j$$

трехкратно полна в H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов// УМН.1971, т.26, №4,с.15-41.
2. Мацаев В.И., Могульский Е.З. Некоторые признаки полноты систем собственных и присоединенных векторов полиномиальных пучков//Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков,1971, в.13, с.3-45.
3. Бабаева С.Ф. Об оценке резольвенты одного класса операторных пучков третьего порядка и ее приложения//Вестник Бакинского Университета, 2010, №3, с.60-65.
4. Ellably A.L. On the Completeness of a System of Elementary Solutions for an Operator-Differential Equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, v. VXXII, No4, p.35-42.
5. Aliev A.R., Ellably A.L. Well-Posaness of a Boundary Value Problem for a Class of Third Order Operator-Differential Equations. // Boundary Value Problems, p.3-10, 2013:140, 15 p.
6. Babaeva S.F. On Regulars Solvability of a Boundary Problem with Operator Boundary Condition// Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, v. XXX, No4, p.25-34.

BİR SİNİF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATORLAR DƏSTƏSİNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏRİ SİSTEMİNİN ÜÇQAT TAMLIĞI HAQQINDA

E.B.SULTANOVA

XÜLASƏ

İşdə baş hissədə normal operator iştirak edən bir sinif operator dəstənin məxsusi və qoşma elementləri sisteminin üçqat tamlığı şərti alınmışdır.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, rezolvent, operator dəstəsi

COMPLETENESS OF THE THREEFOLD SYSTEM OF EIGEN AND ADJOINT VECTORS OF A CLASS OF THIRD ORDER OPERATOR BEAMS

E.B.SULTANOVA

SUMMARY

We obtain conditions on the triple system of eigen and adjoint vectors for a certain class of operator pencils the main parts of which contain normal operators. The received conditions are expressed in terms of the operators of operator pencils.

Key words: Hilbert space, rezolvent, operator pencil.

Поступила в редакцию: 02.12.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.